Решение Варианта 6401

1. 0,8
2. 1
3. 4
4. −2,5
5. 231
6. 18
7. 1,5
8. 3
9. 70
10. 20
11. 1512
12. 3,5
13. 23
14. 2
15. 9
16. 3600
17. 2,5
18. 34
19. 0,75
20. 42,25

Решение части 2.

№21. Сократите дробь $\frac{12^n}{2^{2n-3}\cdot 3^{n-1}}$.

Решение.

$$\frac{12^n}{2^{2n-3}\cdot 3^{n-1}}=\frac{(2^2\cdot 3)^n}{2^{2n-3}\cdot 3^{n-1}}=\frac{2^{2n}}{2^{2n-3}}\cdot\frac{3^n}{3^{n-1}}=2^{2n-2n+3}\cdot 3^{n-n+1}=$$

$$=2^3\cdot 3^1=8\cdot 3=24.$$

Ответ: 24.

№22. Туристы проплыли на лодке от лагеря некоторое расстояние вверх по течению реки, затем причалили к берегу и, прогуляв 3 часа, вернулись обратно через 5 часов от начала путешествия. На какое расстаяние от лагеря они отплыли, если скорость течение реки 2 км/ч, а собственная скорость лодки 8 км/ч?

Решение.

	v	t	S
по течению	? км/ч	? ч, стоянка 3 ч } 5 ч	? км одинаковое
против течение	? км/ч	? ч	? км
собственная скорость	8 км/ч	—	—
скорость течение	2 км/ч	—	—

1) $v_{\text{по теч}} = 2 + 8 = 10$ (км/ч)

2) $v_{\text{пр. теч}} = 8 - 2 = 6$ (км/ч)

3) $t_{\text{в пути}} = 5 - 3 = 2$ (ч)

4) Пусть расстояние равно x км. Тогда $t_{\text{по теч}} = \frac{x}{10}$ ч, $t_{\text{пр. теч}} = \frac{x}{6}$ ч. Так как всего потрачено 2ч, то составим уравнение:

$$\frac{x}{10} + \frac{x}{6} = 2 \quad \Big| \cdot 30$$

$3x + 5x = 60$

$8x = 60$

$x = 60 : 8$

$x = 7{,}5$

Значит расстояние 7,5 км.

Ответ: 7,5 км.

№23. Постройте график функции $y = \frac{(x-2)(x^2-5x+4)}{x-4}$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком функции ровно одну общую точку.

Решение.

Найдем ОДЗ. Дробь имеет смысл, если знаменатель не равен нулю. $x - 4 \neq 0$; $x \neq 4$.

Упростим выражение $\frac{(x-2)(x^2-5x+4)}{x-4}$

Разложим на множители квадратный трёхчлен $x^2 - 5x + 4$

$D = b^2 - 4ac = 25 - 4 \cdot 4 = 9$

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{5+3}{2} = 4$

$x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{5-3}{2} = 1$.

$x^2 - 5x + 4 = (x-1)(x-4)$

$$\frac{(x-2)(x^2-5x+4)}{x-4} = \frac{(x-2)(x-1)\cancel{(x-4)}}{\cancel{x-4}} = x^2 - 2x - 1x + 2 =$$

$= x^2 - 3x + 2$.

Построим график функции $y = x^2 - 3x + 2$ при $x \neq 4$.

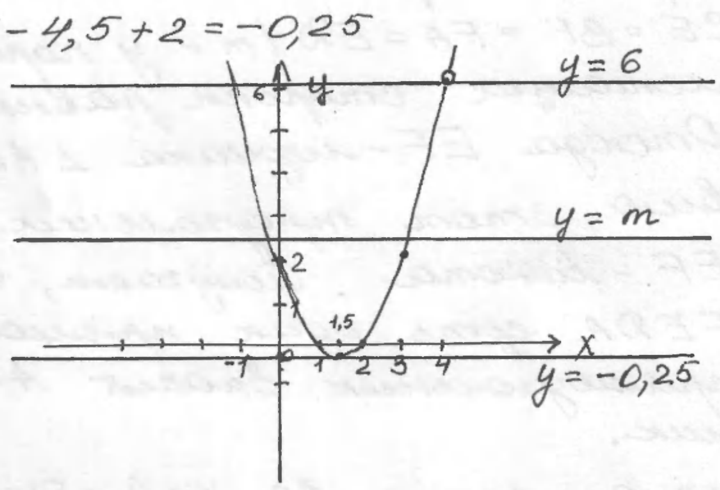
$y = x^2 - 3x + 2$ – квадратичная функция, графиком будет парабола.

Найдем координаты вершины параболы:

$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{3}{2} = 1,5$

$y_0 = 1,5^2 - 3 \cdot 1,5 + 2 = 2,25 - 4,5 + 2 = -0,25$

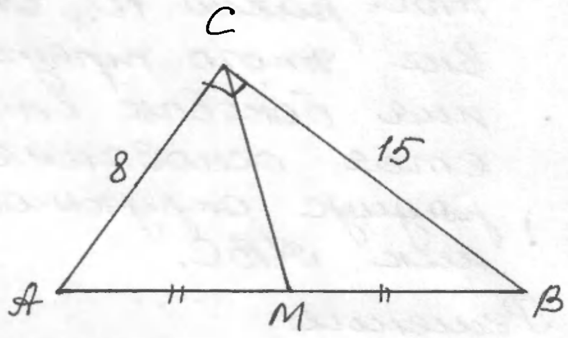
x	0	1	1,5	2	3	4
y	2	0	-0,25	0	2	6



Прямая $y = m$ имеет с графиком функции ровно одну общую точку при $m = 6$ или $m = -0,25$.

Ответ: $-0,25$; 6.

№ 24. В прямоугольном $\triangle ABC$ с прямым углом C известны катеты: $AC = 8$, $BC = 15$. Найдите медиану CM этого треугольника.



Решение.

Если около прямоугольного треугольника описать окружность, то гипотенуза прямоугольного треугольника будет диаметром этой окружности, а середина гипотенузы – центром этой окружности. Значит медиана проведённая из прямого угла, является радиусом окружности и равна половине гипотенузы.

По теореме Пифагора

$AB^2 = AC^2 + CB^2 = 8^2 + 15^2 = 64 + 225 = 289$

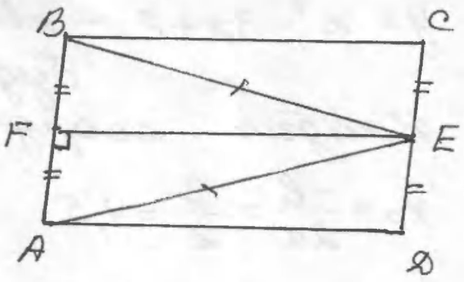
$AB = \sqrt{289} = 17$

Значит $CM = 17 : 2 = 8,5$.

Ответ: 8,5.

№25. В параллелограмме ABCD точка E – середина стороны CD. Известно, что $EA = EB$. Докажите, что данный параллелограмм – прямоугольник.

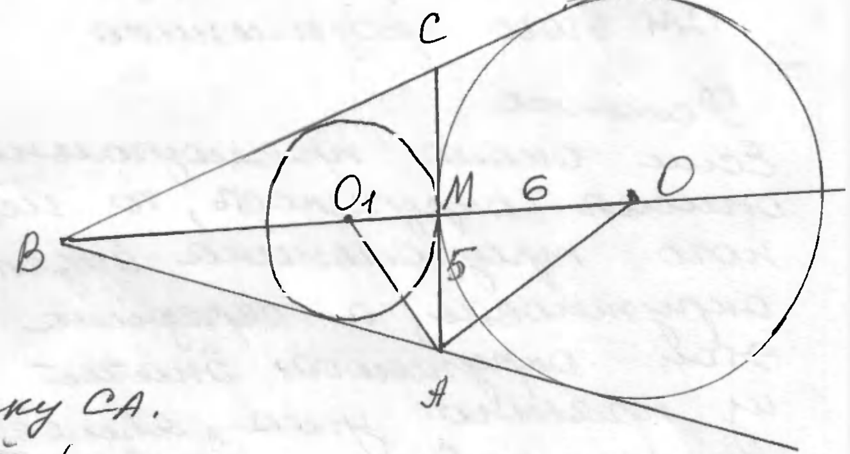
Решение



Проведём через точку E прямую $EF \parallel BC$. Значит $EF \parallel AD$. Следовательно $FBCE$ и $AFED$ - параллелограммы. Значит $CE = BF = FA = ED$ (т.к. у параллелограмма противолежащие стороны равны).
Отсюда EF - медиана $\triangle ABE$. А так как по условию этот треугольник равнобедренный, то EF - высота. Получаем, что в параллелограмме $FEDA$ есть один прямой угол. Значит $FEDA$ - прямоугольник. Значит $ABCD$ - тоже прямоугольник.

№26. Основание AC равнобедренного треугольника ABC равно 10. Окружность радиуса 6 с центром вне этого треугольника касается продолжения боковых сторон треугольника и касается основания AC в его середине. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.

Решение



Центры окружностей, вписанных в угол CBA лежат на биссектрисе угла CBA. И так как $\triangle ABC$ равнобедренный то BO - серединный перпендикуляр к отрезку CA.
$\triangle O_1OA$ прямоугольный (так как угол между биссектрисами AO_1 и AO смежных углов равен $90°$)
Получаем, что в прямоугольном $\triangle$-ке O_1AO высота AM, проведенная из прямого угла делит его на два подобных треугольника $\triangle O_1MA$ и $\triangle OMA$.
Значит соответствующие стороны этих треугольников пропорциональны.

$$\frac{O_1M}{AM} = \frac{AM}{OM} \Rightarrow O_1M = \frac{AM^2}{OM} = \frac{5^2}{6} = \frac{25}{6} = 4\frac{1}{6}$$

Ответ: $4\frac{1}{6}$.

Решение Варианта 6402.

1. 0,6
2. 4
3. 3
4. −0,9
5. 312
6. 9
7. 2
8. 3
9. 62
10. 40
11. 3408
12. 0,75
13. 13
14. 1
15. 2
16. 868
17. 1,9
18. 34
19. 0,7
20. 20,25

Решение части 2.

№21. Сократите дробь $\frac{45^n}{3^{2n-1}\cdot 5^{n-2}}$.

Решение.

$$\frac{45^n}{3^{2n-1}\cdot 5^{n-2}}=\frac{(3^2\cdot 5)^n}{3^{2n-1}\cdot 5^{n-2}}=\frac{3^{2n}}{3^{2n-1}}\cdot\frac{5^n}{5^{n-2}}=3^{2n-2n+1}\cdot 5^{n-n+2}=$$

$$=3^1\cdot 5^2=3\cdot 25=75.$$

Ответ: 75.

№22. Туристы проплыли в лодке от лагеря некоторое расстояние вверх по течению реки, затем причалили к берегу и, погуляв 3 часа, вернулись обратно через 7 часов от начала путешествия. На какое расстояние от лагеря они отплыли, если скорость течения реки равна 3 км/ч, а собственная скорость лодки 5 км/ч?

Решение.

	v	t	S
по течению	? км/ч	? ч; стоянка 3 ч; } 7 ч.	? км; одинаковое
против течения	? км/ч	? ч	? км
собственная скорость	5 км/ч	—	—
скорость течения	3 км/ч	—	—

1) $v_{\text{по теч.}} = 5 + 3 = 8$ (км/ч)

2) $v_{\text{пр. теч.}} = 5 - 3 = 2$ (км/ч)

3) $t_{\text{в пути}} = 7 - 3 = 4$ (ч)

4) ~~Пусть~~ путь равен x км. Тогда $t_{\text{по теч.}} = \frac{x}{8}$ ч, $t_{\text{пр. теч.}} = \frac{x}{2}$ ч. Т.к. всего 4ч, то составим уравнение:

$$\frac{x^{\backslash 1}}{8} + \frac{x^{\backslash 4}}{2} = 4^{\backslash 8} \Big| \cdot 8$$

$1x + 4x = 32$

$5x = 32$

$x = 6,4$

Значит весь путь 6,4 км.

Ответ: 6,4 км.

№ 23. Постройте график функции $y = \frac{(x-5)(x^2-6x+8)}{x-2}$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Решение.

Найдем ОДЗ. Дробь имеет смысл, если знаменатель не равен нулю: $x - 2 \neq 0$; $x \neq 2$.

Упростим выражение $\frac{(x-5)(x^2-6x+8)}{x-2}$

Разложим трёхчлен $x^2 - 6x + 8$ на множители:

$D = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \cdot 8 = 36 - 32 = 4$

$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{6+2}{2} = 4$

$x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{6-2}{2} = 2.$

$x^2 - 6x + 8 = (x-4)(x-2)$

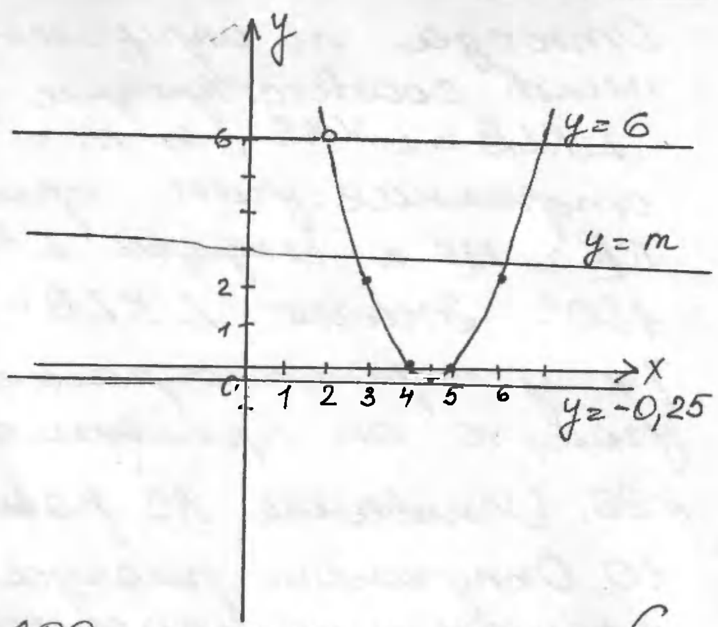
$$\frac{(x-5)(x^2-6x+8)}{x-2} = \frac{(x-5)(x-4)\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}} = x^2 - 5x - 4x + 20 = x^2 - 9x + 20$$

Построим график функции $y = x^2 - 9x + 20$ при $x \neq 2$. Это квадратичная функция, графиком будет парабола. Найдём координаты вершины

$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{9}{2} = 4,5$ $\quad y_0 = 4,5^2 - 9 \cdot 4,5 + 20 = 20,25 - 40,5 + 20 =$

$= -0,25$

x	3	4	4,5	5	6	2
y	2	0	-0,25	0	2	6



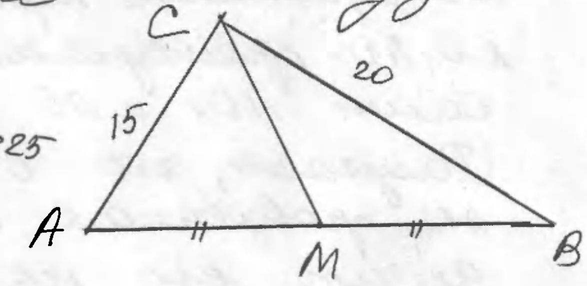
Прямая $y = m$ имеет с графиком функции ровно одну общую точку при $m = -0,25$ или $m = 6$.

Ответ: $-0,25$; 6.

№24. В прямоугольном $\triangle ABC$ с прямым углом C известны катеты: $AC = 15$, $BC = 20$. Найдите медиану CM этого треугольника.

Решение.

Если около прямоугольного треугольника описать окружность, то гипотенуза этого треугольника будет диаметром этой окружности, а середина гипотенузы - центром этой окружности. Значит медиана, проведенная из прямого угла, является радиусом описанной окружности и равна половине гипотенузы.



По теореме Пифагора

$AB^2 = AC^2 + BC^2 = 15^2 + 20^2 = 225 + 400 = 625$

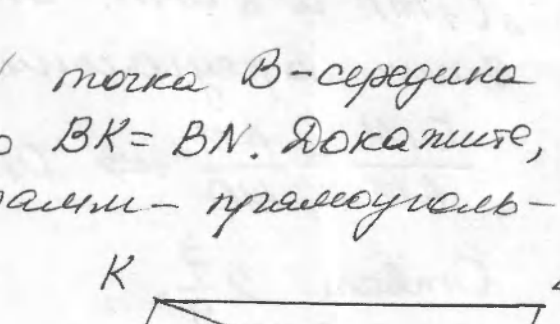
$AB = \sqrt{625} = 25$.

Значит $CM = 25 : 2 = 12,5$.

Ответ: $12,5$.

№25. В параллелограмме $KLMN$ точка B - середина стороны LM. Известно, что $BK = BN$. Докажите, что данный параллелограмм - прямоугольник.

Решение.

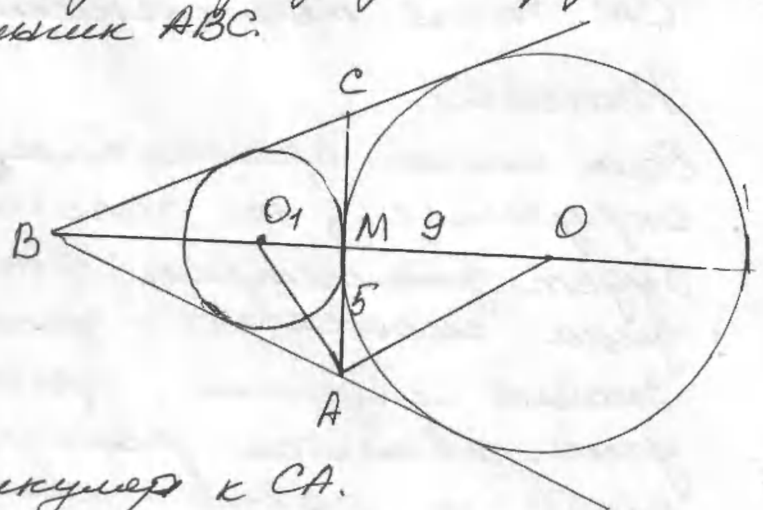


$\triangle KLB = \triangle NMB$ (по 3 сторонам),
т.к. $KB = NB$ (по условию)
$LB = BM$ (по условию)
$KL = NM$ (т.к. у параллелограмма противолежащие стороны равны)

Отсюда по определению равных треугольников соответствующие углы равны $\angle KLB = \angle NMB$, а т.к это внутренние односторонние углы при параллельных прямых KL и MN и секущей $\angle M$, то их сумма равна $180°$. Значит $\angle KLB = \angle NMB = 180 : 2 = 90°$.

Т.к. у параллелограмма есть один прямой угол, то он прямоугольник.

№26. Основание AC равнобедренного $\triangle ABC$ равно 10. Окружность радиуса 9 с центром вне этого треугольника касается продолжения боковых сторон треугольника и касается основания AC в его середине. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.



Решение

Центры окружностей, вписанных в $\angle CBA$ лежат на биссектрисе угла CBA. Т.к. $\triangle CBA$ – равнобедренный, то BO серединный перпендикуляр к CA.

$\triangle O_1AO$ - прямоугольный (т.к. угол между биссектрисами AO_1 и AO смежных углов равен $90°$)

Получаем, что в прямоугольном $\triangle AOO_1$ высота AM, проведённая из вершины прямого угла, делит его на два подобных треугольника $\triangle O_1MA$ и $\triangle OMA$. Значит соответственные стороны этих треугольников пропорциональны.

$$\frac{O_1M}{AM} = \frac{AM}{MO} \Rightarrow O_1M = \frac{AM^2}{MO} = \frac{5^2}{9} = \frac{25}{9} = 2\frac{7}{9}$$

Ответ: $2\frac{7}{9}$.